ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(ΘΕΜΑΤΑ Α-Γ)

Θέμα Α

Α1) Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών απόδειξη § 1.8 σχ. βιβλίο

Α2) Ορισμός σχολικό § 2.2

Α3) (Λ) πχ $f(x) = x^3 / \mathbb{R}$ $f \uparrow / \mathbb{R}$ αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$

Α4) α) - Λ β) - Σ γ) - Σ δ) - Σ ε) - Σ

Θέμα Β

Β1) $A_f = (1, +\infty)$ $\quad A_g = \mathbb{R}$

Η $f\circ g$ ορίζεται στο σύνολο $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty)$

Οπότε $(f\circ g)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}, \quad x>0$

Β2) Για $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$: $(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2)$

$\Longrightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Longrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1) = (e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)$

$\Longrightarrow \cancel{e^{x_1 x_2}} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - \cancel{2} = \cancel{e^{x_1 x_2}} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - \cancel{2}$

$\Longrightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Longrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \xrightarrow{e^x\ 1-1} x_1 = x_2$

Οπότε $f\circ g$ 1-1 άρα υπάρχει η

$(f\circ g)^{-1} : (f\circ g)((0,+\infty)) \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \Longleftrightarrow ye^x - y = e^x + 2$

$\Longleftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$

• $y = 1$ η (1) $\Longleftrightarrow 0e^x = 3$ αδύνατη άρα $1 \notin (f\circ g)((0,+\infty))$

• Αν $y \neq 1$ η (1) $\Longleftrightarrow e^x = \dfrac{y+2}{y-1}$

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Longleftrightarrow y < -2$ ή $y > 1$ (2)

και $x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$ άρα $x>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1}>0 \Leftrightarrow y>1 \quad (3)$$

Από (2), (3) τελικά $y>1$

Έτσι: $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),\ x>1$

B3) Για $x>1$: $\varphi'(x)=\frac{x-1}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'$

$$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)^2}<0$$

άρα $\varphi \downarrow$ στο $(1,+\infty)$.

B4) $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln 1=0.$

ή για το (B2) μελετάμε τη μονοτονία της $f\circ g$ μέσω παραγώγου και σύνολο τιμών με όρια

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών.
Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως πράξεις μεταξύ συνεχών
Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x=0$.
Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = 1-\ln\lambda \Leftrightarrow$

$1-\ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = 1-\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0.$ (1)

Θεωρώ $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x>0$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$
$\Rightarrow \varphi \uparrow$ στο $(0, +\infty)$. Από (1) είναι $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1)$
$\overset{\varphi \uparrow}{\underset{\varphi\ (1-1)}{\Leftrightarrow}} \lambda = 1.$

Γ2)

Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x<0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1-1+x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow$ Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Για $x>0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1+0 = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} =$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτομένη στο $A(0,1)$ έχει εξίσωση:
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x+1$
Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3) Για $x<0$ $f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{-(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x>0$ $f'(x)=(ημx+συνx)'=συνx-ημx$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, & x\le 0\\ συνx-ημx, & x>0\end{cases}$

Για $x\le 0$ είναι $f'(x)>0$

Για $0<x<\frac{3π}{2}$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow συνx-ημx=0 \Leftrightarrow ημx=συνx \overset{συνx\neq 0}{\Longleftrightarrow} εφx=1 \Leftrightarrow x=\frac{π}{4}$ ή $x=\frac{5π}{4}$ αφού $x\in\left(0,\frac{3π}{2}\right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty,\frac{3π}{2}\right)$ και $f'(x)=0$ στα $x=\frac{π}{4}$ και $x=\frac{5π}{4}$ αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία

Γ4) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $Μ(α,f(α))$ είναι $y-f(α)=f'(α)(x-α)$. Για $y=0 \Rightarrow$

$-f(α)=f'(α)x-αf'(α) \Leftrightarrow x=\frac{αf'(α)-f(α)}{f'(α)}=α-\frac{f(α)}{f'(α)}$

$\Rightarrow$ το σημείο $B\left(α-\frac{f(α)}{f'(α)},0\right)$

Επομένως $x_B=α-\frac{f(α)}{f'(α)}=α-\frac{\frac{1}{1-α}}{\frac{1}{(1-α)^2}}=α-(1-α)=2α-1$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι

$x_B(t)=2α(t)-1 \Rightarrow x'_B(t)=2α'(t) \Rightarrow x'_B(t)=2\left(-\frac{α(t)}{3}\right)$

$\Rightarrow x'_B(t)=-\frac{2}{3}α(t)$ (1)

Όμως ισχύει $α(t_0)=-1$

Από (1) για $t=t_0 \Rightarrow x'_B(t_0)=-\frac{2}{3}α(t_0) \Rightarrow$

$x'_B(t_0)=-\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0)=\frac{2}{3}$ $\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$