ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Α' τρόπος (

$f'(x)=e^x+2x-e$

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$

$f'(0)=1-e<0$

$f'(1)=e+2-e=2>0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλ. $x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$ (1)

$f''(x)=e^x+2>0 \Rightarrow f' \nearrow$

Αν $x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow$

Αν $x>x_0 \Rightarrow f'(x)>f'(x_0) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow$

Στο $(-\infty,x_0)$ η $f'(x)<0$ στο $(x_0,+\infty)$ η $f'(x)>0$ και συνεχής στο x_0, άρα το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο.

Αφού η f' είναι $\nearrow$ το $f(x_0)$ είναι μοναδικό.

$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$ (*)

$\xRightarrow{(1)} e^{x_0}+2x_0-e=0 \Rightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ (**)

$\xRightarrow[(**)]{(*)} f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1 \Rightarrow \boxed{f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1}$

Β' τρόπος (για την τουλάχιστον 1 $x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ συνεχής στο } [0,1]\\ \text{Η } f \text{ παρ/μη στο } (0,1)\\ f(0)=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Θ.Rolle}} \begin{array}{l}\text{υπάρχει 1 τουλάχιστον}\\ x_0\in(0,1):\ f'(x_0)=0\end{array}$$

Δ2) $L = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right) \right]$

$$-1 \le \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \le 1 \iff$$

$$-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \le \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \le 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

διότι $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$

και $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 (αφού στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο).

οπότε

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \left(-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) = +\infty \\ &\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) = +\infty \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right]$$

Δ3) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + x - x_0$$

Η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $[x_0, 1]$
$g(x_0) = f(x_0) < 0$

διότι στο $(x_0, 1)$ η $f \nearrow$ άρα για $x_0 < 1 \Rightarrow f(x_0) < 0$

$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$ (αφού $x_0 > 1$)

Από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλ. $\rho \in (x_0, 1)$: $g(\rho) = 0$.

Έστω ότι υπάρχει $\rho_1 \in (x_0, 1)$: $g(\rho_1) = 0$, αφού η g συνεχής στο $[x_0, 1)$ θα είναι συνεχής στο $[\rho_1, 1]$,
Τότε θα υπάρχει από Θ. Rolle: 1 τουλ. $\xi \in (\rho_1, 1)$:

$g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + 1 = 0 \Rightarrow f'(\xi) = -1$.

όμως $f' \nearrow$ $x \in [x_0, 1]$

$x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$

$f'(\xi) > 0$ άρα $f'(\xi) = -1$ άτοπο.

Β' ΛΥΣΗ: $g'(x) = f'(x) + 1$

$x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Δ4) $f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa)+1) \quad \kappa \in (\rho, 1)$

$f(x_0) > (x_0-\rho)(f'(\kappa)+1) \quad , \rho \in (x_0, 1)$

$x_0 - \rho < 0$

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)+1$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\rho} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-x_0+\rho}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$$

Από Δ3 ερώτημα:

$f(\rho)+\rho-x_0=0 \Rightarrow -x_0+\rho = -f(\rho)$

άρα $\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)$

ΘΜΤ f στο $[x_0, \rho]$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$

f παρ/μη στο (x_0, ρ)

άρα υπάρχει 1 τουλ. $\xi \in (x_0, \rho)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$

$\Rightarrow$ η $f'(\xi) < f'(\kappa) \overset{f' \uparrow}{\Longrightarrow} \xi < \kappa$ ισχύει

μαζί $\xi < \rho < \kappa$.